

**Козуб Ю.Г.**, канд. техн. наук, доцент,  
**Козуб Г.А.**, канд. техн. наук, доцент  
(ЛНУ ім. Тараса Шевченка)

## **НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ АМОРТИЗАТОРОВ**

**Козуб Ю.Г.**, канд. техн. наук, доцент,  
**Козуб Г.А.**, канд. техн. наук, доцент  
(ЛНУ ім. Тараса Шевченка)

## **НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ГУМОМЕТАЛЕВИХ АМОРТИЗАТОРІВ**

**Kozub Yu.G.**, Ph. D., Associate Professor,  
**Kozub G.A.**, Ph. D., Associate Professor  
(LNU named after Taras Shevchenko)

## **NON-LINEAR DEFORMATION OF MULTILAYER RUBBER- METAL SHOCK-ABSORBERS**

**Аннотация.** Для решения задачи динамического деформирования эластомерных элементов разработана математическая модель и предложен метод расчёта конструкций с учётом физической и геометрической нелинейности слабосжимаемых вязкоупругих тел. Слабая сжимаемость эластомеров проявляется при стеснённой деформации эластомеров и деформации тонких слоёв резиновых элементов в резинометаллических конструкциях. Для описания нелинейных вязкоупругих свойств эластомера используются законы Пенга-Ландела, Линдли, модифицированный закон Гука. В качестве ядра релаксации используется ядро Работнова. Амплитуда колебаний амортизатора определяется из решения задачи динамики методом конечных элементов с применением схемы Ньюмарка. Предложенный метод используется для решения связанной задачи термоупругости и определения долговечности на основе энергетического критерия.

**Ключевые слова.** слабая сжимаемость, эластомер, долговечность, метод конечных элементов

**Введение.** В машиностроении и строительстве широкое распространение получили вязкоупругие демпфирующие элементы конструкций. Для уменьшения осадки таких демпфирующих конструкций их чаще всего изготавливают в виде многослойных резинометаллических пакетов, в которых основную демпфирующую функцию выполняют эластомерные слои. Исследованию вязкоупругих свойств резины, анализу деформирования и разрушения эластомерных элементов конструкций посвящено достаточно большое количество работ отечественных и зарубежных авторов [1-4]. Наиболее эффективным для описания вязкоупругих свойств является применение уравнений Вольтерра. В динамических расчётах следует учитывать эффекты демпфирования резиновых элементов конструкций, случайный характер возмущающих воздействий и наследственно-упругую реакцию на них [3, 5-9]. Чаще всего при исследовании поведения резины вводится гипотеза о несжимаемости этого материала. Однако при стеснённых деформациях эта гипотеза неприемлема [10]. Аналитические решения

уравнений в задачах о деформировании конструкций при циклическом нагружении получены лишь для одномерного случая, что значительно ограничивает возможности получить надёжное решение для элементов конструкций, имеющих сложную форму. В этом случае наиболее эффективным является применение численных методов решения задач в трёхмерной постановке, одним из которых является метод конечных элементов. Целью работы является разработка эффективного метода решения задачи о деформировании и определения долговечности резинометаллических амортизаторов с учётом нелинейных свойств эластомера.

**Результаты исследований и их обсуждение.** Деформирование конструкций из эластомеров под действием динамических нагрузок сопровождается существенной диссипацией энергии, которая в свою очередь сопровождается саморазогревом. Источниками теплообразования служат напряжения и скорости деформаций. На основе вариационного уравнения Био уравнение динамики эластомера имеет вид

$$\int_V (P_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dv + \int_S p_i \delta u_i ds = \delta W - \int_V \alpha_T (T - T_0) \delta \theta dv, \quad (1)$$

где  $P_i$ ,  $p_i$  – компоненты объёмных и поверхностных сил;  $\rho$  – плотность;  $\alpha_T$  – коэффициент теплового расширения;  $T - T_0$  – приращение температуры;  $W$  – функционал энергии тела;  $u_i$  – компоненты вектора перемещений;  $\theta$  – относительное изменение объёма.

Это уравнение следует дополнить уравнением теплопроводности

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho c T_{,i} T dv dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \lambda_{(ij)} g^{ij} T_{,i} T_{,j} dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V w_0 T dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S [q + h(T - T^c)] T ds dt, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность;  $c$  – теплоёмкость;  $\lambda_{ij}$  – тензор теплопроводности;  $w_0$  – мощность внутренних источников тепла;  $q$  – интенсивность тепловых потоков;  $h$  – коэффициент теплопередачи;  $T^c$  – температура окружающей среды.

При расчёте эластомерных элементов конструкций в большинстве работ принимается гипотеза о несжимаемости материала с применением функционалов энергии несжимаемого тела. Такой подход позволяет получить решение для фиксированного значения коэффициента Пуассона.

Для нелинейного слабосжимаемого материала можно использовать модифицированный закон Гука [11]

$$\sigma^{ij} = \int_0^{\varepsilon_{mn}} \left( G^{ki} G^{lj} - \frac{1}{3} G^{ij} G^{kl} \right) d\varepsilon_{ij} - \int_0^{\hat{G}^x} B(\sqrt{I_3} - 1) dG^{mn}, \quad (3)$$

где  $G^{ij}$  – компоненты метрического тензора;  $I_3$  – инвариант тензора деформаций.

Упругое поведение эластомеров может быть описано с помощью специальных функционалов удельной потенциальной энергии деформации. Для слабосжимаемых материалов наиболее эффективными являются потенциалы Линдли и Пенга-Ландела. В качестве физических констант в них используются параметры Ляме.

Потенциал энергии деформации Пенга-Ландела в работе [12] преобразован к виду

$$W = \frac{\mu j_1}{\sqrt[3]{I_3}} + \frac{1}{2} B (\sqrt{I_3} - 1)^2. \quad (4)$$

Для функционала энергии деформации в законе Линдли используются кратности удлинений [13]

$$W = \frac{\mu}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{B}{2} [(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - c)^2 - (1 - c)^2], \quad (5)$$

где  $\lambda_i$  – кратности удлинения.

Законы Пенга-Ландела и Линдли при условии несжимаемости материала ( $I_3 = 1$ ) практически сводятся к закону Гука.

В высокоэластичном состоянии проявляется вязкоупругое поведение эластомера, то есть носит чисто выраженный релаксационный характер. Большая вязкость, выраженный релаксационный характер напряжений, геометрическая и физическая нелинейность деформирования требует привлечения математического аппарата нелинейной трёхмерной теории вязкоупругости. Используя принцип Вольтерра связь между компонентами напряжений и деформаций для нелинейного вязкоупругого слабосжимаемого материала можно принять в виде закона Гука, Пенга-Ландела или Линдли, заменяя упругие константы интегральными операторами Вольтерра.

Тогда для вязкоупругого материала имеем

– закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & 2\mu \left[ g^{mi} g^{nj} \varepsilon_{mn} - \frac{1}{3} j_1 g^{ij} - \int_{-\infty}^t R_\mu(t-\tau) \left( g^{mi} g^{nj} \varepsilon_{mn} - \frac{1}{3} j_1 g^{ij} \right) d\tau \right] + \\ & + B \left[ (\sqrt{I_3} - 1) g^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t-\tau) (\sqrt{I_3} - 1) g^{ij} d\tau \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

– закон Пенга-Ландела

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & \sqrt{I_3} \left[ \mu \left( \left( -I_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9} (I_3 - 1) (I_1 - 2) + \frac{2}{9} (I_3 - 1) \right) G^{ij} + I_3^{-\frac{4}{3}} g^{ij} \right) - \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^t R_\mu(t-\tau) I_3^{-\frac{4}{3}} g^{ij} d\tau - \int_{-\infty}^t R_\mu(t-\tau) \left( -I_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9} (I_3 - 1) (I_1 - 2) + \frac{2}{9} (I_3 - 1) \right) G^{ij} d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{B}{2} \left( (I_3 - 1)G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau)(I_3 - 1)G^{ij} d\tau \right) \Bigg]; \quad (7)$$

– закон Линдли

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left[ \mu \left( g^{ij} - I_3 G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_\mu(t - \tau)(g^{ij} - I_3 G^{ij}) d\tau \right) + \right. \\ & \left. + B \left( \frac{1}{2} c I_3 (I_3 - 1) G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) \left( \frac{1}{2} c I_3 (I_3 - 1) G^{ij} \right) d\tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Наиболее полного описания реального процесса деформирования эластомерного элемента конструкции можно добиться используя ядра Работнова и Ржаницына.

Поскольку законы Пенга-Ландела та Линдли в предельном случае имеют вид закона Гука, то нелинейные уравнения можно линеаризовать для случая слабой сжимаемости материала.

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( C_j^m \nabla_i u_m + C_i^m \nabla_j u_m + \nabla_i u_m \nabla_j u_n g^{mn} \right),$$

где  $\nabla_i u_m = u_{m,i} C_i^k \Gamma_{mk}^l u_l$ ;  $C_i^n = \frac{\partial z^n}{\partial x^i}$ ;  $z^n$  – координаты базисной системы координат;  $x^i$  – координаты местной системы координат.

Тензор деформаций можно представить в виде суммы линейной и нелинейной составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^n + \varepsilon_{ij}^h.$$

Первый инвариант тензора деформаций Коши-Грина так же можно представить в виде суммы линейной и нелинейной составляющих

$$j_1 = j_1^n + j_1^h.$$

После подстановки в соотношения для слабосжимаемого материала (например, для закона Пенга-Ландела) можно получить линеаризованные соотношения

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{\mu} (g^{ij} - G^{ij}) + \tilde{B} j_1^n G^{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\mu} (H_1 g^{ij} - H_2 G^{ij}) + \tilde{B} \theta^h G^{ij}$$

или

$$\tilde{\sigma}^{ij} = 2\tilde{\mu} \varepsilon_{ij}^n + \tilde{B} j_1^n G^{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\mu} (H_1 g^{ij} - H_2 G^{ij}) + \tilde{B} \theta^h G^{ij}, \quad (9)$$

где  $H_1, H_2, \theta^H$  – соотношения, обусловленные нелинейными составляющими инвариантов.

Кроме того, в выражении (9) можно выделить упругую и вязкую составляющие тензора напряжений

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & 2\mu\varepsilon_{ij}^n + B j_1^n G^{ij} - \frac{1}{3}\mu(H_1 g^{ij} - H_2 G^{ij}) + B\theta^H G^{ij} - 2\mu \int_{-\infty}^t R_\mu(t-\tau)\varepsilon_{ij}^n(\tau)d\tau - \\ & - B \int_{-\infty}^t R_b(t-\tau)j_1^n(\tau)G^{ij}d\tau - \frac{1}{3}\mu \int_{-\infty}^t R_\mu(t-\tau)(H_1 g^{ij} - H_2 G^{ij})d\tau - B \int_{-\infty}^t R_b(t-\tau)\theta^H G^{ij}d\tau. \end{aligned}$$

Модель вязкоупругой среды определяется включёнными в неё упругими и вязкими компонентами. Усложняя структуру модели, можно получить хорошую временную связь между напряжениями и деформациями. При этом в пределе можно рассматривать модели с бесконечным множеством упругих и вязких элементов, что повышает порядок дифференциальных операторов и усложняет их применение при решении практических задач. Связь между напряжениями и деформациями можно установить и с помощью интегральных уравнений состояния. Пропорциональность между приращением деформаций и напряжений в интегральных уравнениях устанавливается с помощью функции, которая называется ядром уравнения. Наибольшее распространение при расчёте эластомеров получило ядро релаксации Ю.Н. Работнова

$$R(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n z^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}.$$

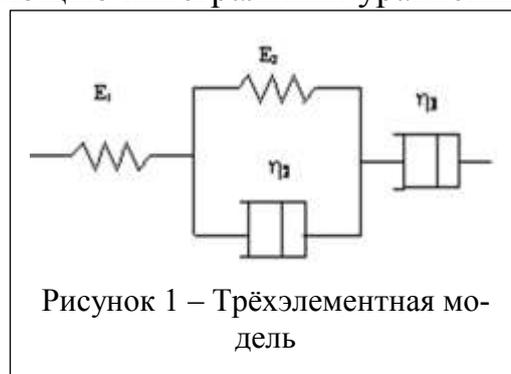


Рисунок 1 – Трёхэлементная модель

Рассматриваем трёхэлементную модель вязкоупругой среды (рисунок 1).

Рассматривая поведение стареющего материала на основе приведённой схемы, для её третьего элемента имеем  $\sigma(t) = \eta_3(t)\varepsilon^p(t)$ , откуда

$$\varepsilon^p(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta_3(t)}.$$

Функцию  $\eta_3(t)$  представим в виде  $\eta_3(t) = \eta_3(0)\varphi = \eta_{30}\varphi$ , где  $\varphi$  – функция старения, соответствует кривой изменения во времени  $E = E(t)$  – модуля упругости. Для расчёта долговечности необходимо иметь аналитическое представление данной функции. Общей аппроксимацией экспериментальных данных для эластомеров является экспоненциальная зависимость [11]:

$$\varphi(t) = \frac{E(t)}{E(0)} = \exp \left[ \left( k_1 - k_2 \int_0^t W(t)dt \right) t \right],$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты аппроксимации;  $W(t)$  – функция, пропорциональная накопленной за время  $t$  энергии деформации.

Критериальное уравнение состояния при циклическом нагружении имеет вид:

$$\Delta U_p^* = \int_0^{t^*} (\sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\chi} - \dot{q}) dt, \quad (10)$$

где  $\Delta U_p^*$  предельное (критическое) значение плотности энергии, идущей на разрушение резины;  $\dot{q}$  – тепловой поток;  $\dot{\chi}$  – энергия внешней агрессивной среды;  $t^*$  – время до локального разрушения.

Для определения долговечности эластомеров используется следующий алгоритм расчёта:

1. Расчёт напряжённо-деформированного и температурного состояний эластомерной конструкции.

2. Определение опасной точки.

3. Решение критериального уравнения (10) в опасной точке.

Конструкции из эластомеров, работающие в динамическом режиме нагружения, подвержены интенсивному диссипативному разогреву. Источниками теплообразования в этом случае являются напряжения  $\sigma^{ij}(t)$  и скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$  в вязкоупругом теле.

Для решения задачи о динамическом равновесии эластомерного элемента конструкции следует вначале решить задачу о свободных колебаниях.

Для большинства задач о свободных колебаниях упруго-наследственного тела используется уравнение в виде

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0,$$

где  $\omega^2 \varphi(t) = \omega_0^2 \left[ \varphi(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]$ .

Рекуррентная формула для решения характеристического уравнения имеет вид

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 \left[ 1 - R \left( \frac{1}{i\omega_n - 1} \right) \right].$$

После проведения преобразований Фурье получим

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 [1 - A(\omega_{n-1}) + iB(\omega_{n-1})],$$

где  $A(\omega) = \int_0^\infty K(z) \cos \omega z dz = \operatorname{Re} K \left( \frac{1}{i\omega} \right)$ ;  $B(\omega) = \int_0^\infty K(z) \sin \omega z dz = -\operatorname{Im} K \left( \frac{1}{i\omega} \right)$ ;

$1 - A(\omega_0) = E(\omega_0)/E_0$ ,  $B(\omega_0) = \psi(\omega_0)/(2\pi)$ ;  $E_0$  – мгновенный модуль упругости;

$E_0(\omega_0)$  – динамический модуль при  $\omega = \omega_0$ ;  $\psi(\omega_0)$  – технический коэффициент поглощения при  $\omega = \omega_0$ .

Для изучения термонапряжённого состояния такого рода конструкций предполагается совместное решение задач термоупругости и теплопроводности. Наиболее эффективным методом решения таких задач является метод конечных элементов. Построение разрешающих уравнений метода конечных элементов для трёхмерной задачи строится на основе использования интерполяционных функций формы для описания полей перемещений, скоростей и ускорений

$$(u:\dot{u}:\ddot{u})_k = \sum_{s=1}^8 N_{(s)} (u:\dot{u}:\ddot{u})_k^{(s)},$$

где  $N_{(s)}$  – степенные функции формы для  $s$ -го узла конечного элемента;  $(u:\dot{u}:\ddot{u})_k^{(s)}$  – векторы перемещений, скоростей и ускорений узла  $s$  конечного элемента по направлению  $k$  в базисной системе координат.

Для обеспечения высокой точности и эффективности процесса решения широкого класса задач иногда целесообразно повысить степень аппроксимирующих функций.

Тогда уравнение движения (1) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Gu = f(t), \quad (11)$$

где  $M$  – матрица масс;  $C$  – матрица демпфирования;  $G$  – матрица жёсткости;  $f(t)$  – вектор узловых сил.

Для определения компонент матрицы жёсткости вариацию потенциальной энергии деформации можно записать в виде

$$\delta\Pi = \int_V \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dv.$$

Используя тройную аппроксимацию полей перемещений, деформаций и функции изменения объёма [11] получаем матрицу жёсткости конечного элемента, моделирующего процесс деформирования слабосжимаемого эстомера

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \delta\{u_s\}^T \{N\} [D_{ij}^s]^T [C^{ijkl}] [D_{kl}^t] \{N\}^T \{u_t\} + \\ & + \delta\{u_s\}^T \{N\} [D_{\theta}^s]^T [C^{\theta}] [D_{\theta}^t] \{N\}^T \{u_t\} = \delta\{u_s\}^T [G] \{u_t\}, \end{aligned}$$

где  $[C^{ijkl}]$ ,  $[C^{\theta}]$  – матрицы упругих констант  $[D]$  – матрица дифференцирования;  $\{u_t\}$  – вектор узловых перемещений.

Матрицу масс вычисляем по формуле

$$M = \int_V \{N\} \rho \{N\}^T dv.$$

Определение матрицы демпфирования с помощью матриц, описывающих свойства конечных элементов не представляется возможным. Поэтому чаще всего её приближённо вычисляют в виде линейной комбинации матриц жёсткости и масс.

Если известны  $n$  коэффициентов демпфирования соответствующих форм собственных колебаний, матрицу демпфирования можно приближённо вычислить по формуле

$$C = M \sum_{i=0}^{n-1} a_i (M^{-1}G)^i,$$

где коэффициенты  $a_i$  определяются из решения уравнений

$$h_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_{k-1} \omega_i^{2k-3}).$$

Для  $n = 2$  выражение приводится к формуле релеевского демпфирования.

Для прямого интегрирования уравнений динамического деформирования чаще всего используется метод Ньюмарка, согласно которому векторы перемещений, скоростей и ускорений на концах временного отрезка  $[t; t + \Delta t]$  связаны соотношениями

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1-\delta)\ddot{u}_t + \delta\ddot{u}_{t+\Delta t}] \Delta t, \quad u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_t + \alpha \ddot{u}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2,$$

где  $\delta \geq 0,5$ ,  $\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$  – условия, при которых рассматриваемая схема интегрирования устойчива.

Выражая скорость и ускорение в конечный момент времени  $t + \Delta t$ , получаем рекуррентное соотношение относительно перемещений в этот момент времени

$$Mb_1 u_{t+\Delta t} + Cb_1 b_5 u_{t+\Delta t} + Gu_{t+\Delta t} = f(t + \Delta t) + M(b_1 u_t + b_2 \dot{u}_t + b_3 \ddot{u}_t) + \\ + C(b_1 b_5 u_t + (b_2 b_5 - 1) \dot{u}_t + (b_3 b_5 - b_4) \ddot{u}_t)$$

где  $b_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$ ,  $b_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$ ,  $b_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$ ,  $b_4 = \Delta t(1 - \delta)$ ,  $b_5 = \delta \Delta t$ .

Определив перемещения на конце временного интервала можно определить скорости и ускорения в этот же момент времени

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = b_1(u_{t+\Delta t} - u_t) - b_2 \dot{u}_t - b_3 \ddot{u}_t, \quad \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + b_4 \ddot{u}_t + b_5 \ddot{u}_{t+\Delta t}.$$

Температурное поле саморазогрева эластомерной конструкции с использованием метода конечных элементов определяется по следующему алгоритму:

1. Решается задача термоупругости при заданной амплитуде колебаний

$$[K^{ij}] \{u_j\} = \{P^i\} + \{Q^i\},$$

где  $[K^{ij}]$  – глобальная матрица жёсткости конструкции;  $\{u_j\}$  – обобщённый вектор перемещений;  $\{P^i\}$  – вектор нагрузки от вынужденных смещений на поверхности тела;  $\{Q^i\}$  – вектор температурной нагрузки.

2. Вычисляем мощность внутренних источников теплообразования как осреднённую за цикл колебания по формуле

$$w_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma^{ij}(t) \dot{\varepsilon}_{ij}(t) dt,$$

где  $\omega$  – частота колебания.

3. Температуру саморазогрева определяем для момента наступления теплового равновесия между конструкцией и окружающей средой путём решения задачи стационарной теплопроводности:

$$[H]\{T\} = -\{R\},$$

где  $[H]$  – глобальная матрица теплопроводности конструкции;  $\{T\}$  – обобщённый вектор узловых температур;  $\{R\}$  – эквивалентный вектор тепловой нагрузки.

4. Для учёта связности полей напряжений и температур процесс решения повторяется, начиная с пункта 1. Удовлетворительное решение получается уже с первым приближением.

В результате реализации приведённого алгоритма получаем поле узловых температур, поле интенсивности внутренних источников и термоупругих напряжений в центрах конечных элементов, которые являются исходными данными для определения долговечности эластомеров.

Наибольшее влияние на долговечность эластомеров оказывают механические напряжения и температура. Если имеется  $n$  точек с различными значениями удельной потенциальной энергии деформации  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$  и различными температурами  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ , расчёт долговечности производится для всех  $n$  точек. В большинстве случаев нет необходимости рассчитывать долговечность для каждой точки конструкции. Расчёт ведётся относительно опасной точки, т.е. той, в которой разрушение начинается в первую очередь.

Практически опасная точка определяется следующим образом: выбираются две точки  $O_1(U_1, T_1)$  и  $O_2(U_2, T_2)$ , причём в одной из точек  $U_1 = \max$ , а в другой  $T_2 = \max$  и расчёт производится для этих точек.

Рассмотрим задачу о деформировании резинометаллического амортизатора опорного узла тепловоза (рис. 2)

Радиус армирующего металлического слоя и резинового



Рисунок 2 – Резинометаллический амортизатор

элемента 0,14 м, толщина резинового элемента 0,035 м, металлического слоя – 0,004 м., количество элементов – 7.

Для снижения осадки используются металлические пластины с буртом размером 0,01 м, ус по бурту 0,1 м. На рис. 3 приведены эпюры напряжений.

Решение критериального уравнения долговечности (10) даёт оценочное значение срока службы резинометаллического амортизатора при вибрационной нагрузке порядка 4,1 года.

**Выводы.** Для анализа процессов динамического деформирования конструкций из эластомеров разработан метод расчёта конструкций с учётом физической и геометрической нелинейности.

Определение долговечности элементов конструкций выполняется на основе решения связанной задачи термоупругости слабосжимаемого вязкоупругого тела.



### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Определение реологических параметров эластомерных материалов / В.И. Дырда, Ю.Г. Козуб, А.С. Кобец [и др.] // Геотехническая механика. – 2007. – Вып. 70. – С. 56-88.
2. Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев жёстко опертой толстостенной вязкоупругой цилиндрической панели / Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Сичко В.М., Завгородний А.В. // Акустичний вісник. – 2010. – Т. 13. – №2. – С. 28-33.
3. Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев трёхслойной толстостенной шарнирно опертой вязкоупругой цилиндрической панели с независимыми от температуры свойствами / Козлов В.И., Карнаухов В.Г., Сичко В.М., Завгородний А.В. // Акустичний вісник. – 2010. – Т. 13, №1. – С. 22-29.
4. Сичко, В.М. Вынужденные резонансные изгибные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругой прямоугольной толстой пластины / В.М. Сичко, А.В. Завгородний, М.И. Вертелецкий // Доп. НАНУ. – 2010. – №9. – С. 44-49.
5. Аврамов, К.В. Нелинейные колебания круглых пластин с вырезами. Метод R-функций / К.В. Аврамов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №2. – С. 118-127.
6. Шопа, Т.В. Дослідження частот власних коливань трансверсально-ізоотропної циліндричної панелі з круговим отвором / Т.В. Шопа // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №2. – С. 128-137.
7. Сметанкіна, Н.В. Нестационарні коливання багатопарових ортотропних оболонок неканонічної форми / Н.В. Сметанкіна // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – №3(55). – С. 38-41.
8. Івасишен, С.Д. Задача Коші для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова багатовимірного марковського процесу / С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, №1. – С. 15-22.

9. Бреславский, И.Д. Вынужденные колебания пологой цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми и свободными краями / И.Д. Бреславский, К.В. Аврамов // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – №36. – С. 20-29.
10. Приближенная реологическая модель материала тонкослойного эластомерного подшипника/ Лейканд М.А., Лавендел Э.Э., Львов С.В. [и др.]// Вопр. динамики и прочности. – 1980.– Вып. 36. – С. 157-168.
11. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+». / В.В. Киричевский, БМ. Дохняк, Ю.Г. Козуб [и др.]. – К.: Наукова думка, 2005. – 402 с.
12. Адамов, А.А. К выбору функционала для описания поведения вязкоупругого материала при конечных деформациях / А.А. Адамов // Научн. тр. Кубан. гос. ун-та. – 1980. – Т. 3. Механика эластомеров. – С. 56-59.
13. Бартенева, Г.М. Физика и механика полимеров / Г.М. Бартенева, Ю.В. Зеленев. – М.: Высш. шк., 1983. – 391 с.
14. Marvalova, B. Viscoelastic properties of filled rubber. Experimental observations and material modelling / B. Marvalova // Engineering Mechanics. – 2007. – Vol. 14, No. 1/2. – Pp. 81-89.

## REFERENCES

1. Dyrda, V.I., Kozub, Yu.G., Kobets, A.S., Naumenko, A.P., Tverdokhleb, T.Ye. and Yatsenko, A.A. (2007), “Determination of rheology parameters of elastomer materials”, *Geo-Technical Mechanics*, no. 70, pp. 56-88.
2. Karnaukhov, V.G., Kozlov, V.I., Sichko, V.M. and Zavgorodnii, A.V. (2010), “An effect of physical nonlinearity on resonance vibration and dissipative heating of rigidly supported thick-walled viscoelastic panel”, *Acoustic bulletin*, vol. 13, no. 2, pp. 28-33.
3. Karnaukhov, V.G., Kozlov, V.I., Sichko, V.M. and Zavgorodnii, A.V. (2010), “Forced resonance vibration and dissipative heating of a three-layered thick-wall simply supported viscoelastic cylindrical panel with temperature-independent properties”, *Acoustic bulletin*, vol. 13, no. 1, pp. 22-29.
4. Sichko, V.M., Zavgorodnii, A.V. and Verteleckiy, M.I. (2010), “Forced resonance vibrations and dissipative heating of a thick-walled viscoelastic cylindrical plate”, *Dopovidi NANU*, no. 9, pp. 44-49.
5. Avramov, K.V. (2009), “Nonlinear vibrations of circular plates with cuts. R-function method”, *Math. Methods and Physicomech. Fields*, vol. 52, no. 2, pp. 118-127.
6. Shopa, T.V. (2009), “Research of frequencies of free vibration for transversal isotropic cylinder panel with the circular cut”, *Math. Methods and Physicomech. Fields*, vol. 52, no. 2, pp. 128-137.
7. Smetankina, N.V. (2009), “Non-stationary vibrations of multi-layered orthotropic shells of noncanonical form”, *Vibracii v tekhnici ta tehnologiyakh*, no. 3(55), pp. 38-41.
8. Ivasishen, S.D. and Pasichnik, G.S. “Cauchy problem for Fokker-Planck-Kolmogorov equation of multidimensional Markov process”, *Math. Methods and Physicomech. Fields*, vol. 53, no. 1, pp. 15-22.
9. Breslavskiy, I.D. and Avramov, K.V. (2008), “The forced oscillations of shallow shell having simply supported and free edges”, *Vestnik NTU “KhPI”*, no. 36, pp. 20-29.
10. Leykand, M.A., Lavendel E.E. and Lvov, S.V. (1980), “Approximate rheological model of material of the think-layer elastomeric bearing”, *Voprosy dinamiki i prochnosti*, no. 36, pp. 157-168.
11. Kirichevskiy, V.V., Dokhnyak, B.M., Kozub, Yu.G., Gomenyuk, S.I., Kirichevskiy, R.V. and Grebenyuk, S.N. (2005), *Metod konechnyih elementov v vyichislitelnom komplekse “MIRELA+”* [The finite element method in calculable complex “MIRELA+”], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
12. Adamov, A.A. (1980), “To the choice of functional for description of conduct of viscoelastic material at finite deformations”, *Nauchnye Trudy Kuban. gos. Universiteta*, vol. 3: Mekhanika elastomerov, pp. 56-59.
13. Bartenev, G.M. and Zelenev, Yu.V. (1983), *Fizika i mekhanika polimerov* [Physics and mechanics of polymers], Vyshaya shkola, Moscow, USSR.
14. Marvalova, B. (2007), “Viscoelastic properties of filled rubber. Experimental observations and material modelling”, *Engineering Mechanics*, vol. 14, no. 1/2, pp. 81-89.

## Об авторах

**Козуб Юрий Гордеевич**, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и прикладной механики, ГУ “Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко” (ЛНУ им. Тараса Шевченко), Старобельск, Украина, [kosub@rambler.ru](mailto:kosub@rambler.ru)

**Козуб Галина Александровна**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и систем, ГУ “Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко” (ЛНУ им. Тараса Шевченко), Старобельск, Украина, [kosub@rambler.ru](mailto:kosub@rambler.ru)

### About the authors

**Kozub Yuriy Gordeyevich**, Candidate of technical sciences (Ph. D.), Associate professor, Head of Department of physics and applied mechanics, Taras Shevchenko National University of Luhansk (LNU), Starobelsk, Ukraine, [kosub@rambler.ru](mailto:kosub@rambler.ru)

**Kozub Galina Alexandrovna**, Candidate of technical sciences (Ph. D.), Associate professor, Associate professor of Department of information technologies and systems, Taras Shevchenko National University of Luhansk (LNU), Starobelsk, Ukraine, [kosub@rambler.ru](mailto:kosub@rambler.ru)

---

**Анотація.** Для розв’язання задачі динамічного деформування еластомірних елементів розроблено математичну модель та метод розрахунку конструкцій з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності слабкостисливих в’язкопружних тіл. Слабка стисливість еластомерів виявляється при обмеженій деформації гумових елементів і деформації тонких шарів гумових елементів в гумометалевих конструкціях. Для опису нелінійних в’язкопружних властивостей еластомера використовуються закони Пенга-Ландела, Ліндлі, модифікований закон Гуку. В якості ядра релаксації використовується ядро Работнова. Амплітуда коливань амортизатора визначається з рішення задачі динаміки методом скінченних елементів із застосуванням схеми Ньюмарка. Запропонований метод використовується для рішення зв’язаної задачі термопружності і визначення довговічності на основі енергетичного критерію.

**Ключові слова.** слабка стисливість, еластомір, довговічність, метод скінченних елементів

**Abstract.** In order to solve a problem of elastomeric elements dynamic deformation a mathematical model was designed and a method for calculating constructions is offered with taking into account physical and geometrical non-linearity of weakly compressible viscoelastic bodies. The weak compressibility of elastomers becomes apparent at straitened deformation of rubber elements and deformation of thin layers in rubber elements of the rubber-metal structures. To describe non-linear viscoelastic properties of elastomer the of Peng-Landel’s law, Lindli’s law, modified Hooke’s law are used. As a kernel of relaxation the Rabotnov’s kernel is used. Amplitude of the shock absorber vibrations is determined by solving a problem of dynamics by finite element method with the N’yumark’s scheme. The proposed method is used for solving a linked problem of thermoelasticity and calculating longevity on the basis of power criterion.

**Keywords:** weak incompressibility, elastomer, longevity, finite element method

*Статья поступила в редакцию 16.04.2015*

*Рекомендовано к печати д-ром техн. наук, проф. В.И. Дырдой*

УДК 678.4.06:621.81

**Дырда В.И.**, д-р техн. наук, профессор  
(ИГТМ НАН України),

**Сокол С.П.**, канд. техн. наук  
(ДГАЭУ),

**Козуб Ю.Г.**, канд. техн. наук, доцент  
(ЛНУ ім. Тараса Шевченка),

**Твердохлеб Т.Е.**, инженер  
(ИГТМ НАН України),

**Колбасин В.А.**, канд. техн. наук, доцент  
(ДГАЭУ)

### **К РАСЧЁТУ МАССИВНЫХ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ДЕФОРМАЦИЯХ СЖАТИЯ**

**Дирда В.І.**, д-р техн. наук, професор  
(ІГТМ НАН України),

**Сокол С.П.**, канд. техн. наук  
(ДДАЕУ),

**Козуб Ю.Г.**, канд. техн. наук, доцент  
(ЛНУ ім. Тараса Шевченка),

**Твердохліб Т.О.**, інженер  
(ІГТМ НАН України),

**Колбасін О.В.**, канд. техн. наук, доцент  
(ДДАЕУ)

### **ДО РОЗРАХУНКУ МАСИВНИХ ГУМОМЕТАЛЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПІД ЧАС ДЕФОРМАЦІЙ СТИСКУ**

**Dyrda V.I.**, D. Sc. (Tech.), Professor  
(IGTM NAS of Ukraine),

**Sokol S.P.**, Ph. D. (Tech.)  
(DSAEU),

**Kozub Yu.G.**, Ph. D. (Tech.), Associate Professor  
(LNU named after T. Shevchenko),

**Tverdokhleb T.Ye.**, Master of Science  
(IGTM NAS of Ukraine),

**Kolbasin V.A.**, Ph. D. (Tech.), Associate Professor  
(DSAEU)

### **ON CALCULATION OF MASSIVE RUBBER-METALLIC ELEMENTS UNDER COMPRESSIVE STRAINS**

**Аннотация.** Излагается методика расчёта жесткостных и диссипативных параметров массивных цилиндрических элементов при деформациях монофазного сжатия. Алгоритм решения задачи сводится к: выбору коэффициентов жёсткости; решению связанной задачи нелинейной термовязкоупругости и расчёту напряжённо-деформированного состояния; построению приближённых соотношений для расчёта жесткостных характеристик элементов